



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Teorema central do limite.

Pergunta 1

I. Preliminares

1) Seja X uma variável aleatória.

Definição: Função $\varphi(t)$ é função característica de X ;
 $\varphi(t) = \mathbb{E} e^{itX}$.

2) Propriedades: $\varphi(0) = 1$; $|\varphi(t)| \leq \mathbb{E} |e^{itX}| \leq 1$.
Se X_1, X_2 são independentes, então $\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t) \varphi_{X_2}(t)$.

3) Teorema central do limite.

Sejam $X_1, \dots, X_n$ são i.i.d.

$$S_n = X_1 + \dots + X_n; \quad \mu = \mathbb{E} X_1; \quad \sigma^2 = \mathbb{E} X_1^2.$$

Teorema 1: $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, 1)$.

4) Definição: sequência $(X_n) \Rightarrow X$,
se as funções de distribuição
 $F_n(x) \Rightarrow F(x)$.

5) Definição: $X_1, \dots, X_{n_k}$ é arranjo triangular.
~~Indep.~~ valores aleatórios independentes.
 $\mathbb{E} X_{nk} = 0$; $\sigma_{nk}^2 = \mathbb{E} X_{nk}^2$
 $\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{r_n} \sigma_{nk}^2$ (1).



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

6) Seja
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{1}{\sigma_n^2} \int_{|X_{nk}| \geq \varepsilon \sigma_n} X_{nk}^2 dP = 0 \quad (2)$$

para $\varepsilon > 0$.

7) Teorema 2: Sejam condições (1) e (2) verdadeiras.

Denotamos $S_n = X_{n1} + \dots + X_{nr_n}$.

Então $\frac{S_n}{\sigma_n} \rightarrow N \in \mathcal{N}(0, 1)$, $n \rightarrow \infty$.

Pergunta 2

8) Demonstração:

a) Temos $|e^{-itx} - (1 - itx - \frac{t^2 x^2}{2})| \leq \min(\frac{1}{6}|tx|^3, |tx|^2)$.

Então para função característica de X_{nk}
$$|\varphi_{nk}(t) - (1 - \frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2})| \leq E \min(\frac{1}{6}|tX_{nk}|^3, |tX_{nk}|^2)$$

b) Pela condição (2) podemos

mostrar que $E \min(\frac{1}{6}|tX_{nk}|^3, |tX_{nk}|^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

c) Vamos escrever:

$X_{nk} \rightarrow X_{nk}/\sigma_n$, portanto podemos pensar em $\sigma_n = 1$.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

d) Da desigualdade em (a) temos

$$\prod_{k=1}^{2n} \left| \varphi_{X_k}(t) - \left(1 - \frac{t^2 X_{k,k}^2}{2}\right) \right| \leq \prod_{k=1}^{2n} \left| \varphi_{X_k}(t) - \left(1 - \frac{t^2 X_{k,k}^2}{2}\right) \right|$$

portanto o produto converge para zero, quando $n \rightarrow \infty$.

e) Podemos mostrar, que

$$\prod_{k=1}^{2n} \left| \left(1 - \frac{t^2 X_{k,k}^2}{2}\right) - e^{-\frac{t^2 X_{k,k}^2}{2}} \right|$$

também converge para zero, quando $n \rightarrow \infty$.

f) Então temos

$$\prod_{k=1}^{2n} e^{-\frac{t^2 X_{k,k}^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

portanto, pelas propriedades das funções características temos demonstração do Teorema 2. $\square$

3) Teorema 1 é caso particular do Teorema 2.

temos neste caso: $k=n$ e $(X_{n,k}, \dots, X_{n,k}) = (X_1, \dots, X_n)$

A condição (2) tem uma forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \int_{|X_1|^2 \geq \epsilon \sqrt{n}} X_1^2 dP = 0, \quad \begin{aligned} \sigma^2 &= \mathbb{P} X_k \\ \mathbb{E} X_k &= 0. \end{aligned}$$

porque $P(|X_1| \geq \epsilon \sqrt{n}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.



Teorema de Stokes

Pergunta 1

1) Teorema: Seja c e $\bar{c}$ ($k+1$) cadeia em M ,
 $\dim M = n$, M - variedade.
Seja ω k -forma.
Então $\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$.

2) Exempl Corolário: Em $\mathbb{R}^3$ temos
 $\omega|_{\vec{F}} = \text{rot } \vec{F}$ - 2-forma no campo
vetorial $\vec{F}$.
 $d\omega|_{\vec{F}} = \text{div } \vec{F}$ - 3-forma, derivada
externa do ω .
Então, da fórmula de Stokes temos

$$\iiint_V \text{div } \vec{F} dV = \iint_{\partial V} \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

para $V \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto em $\mathbb{R}^3$.

Isso é o teorema de Gauss - Green - Stokes

Pergunta 2: Se $\vec{F}$ for ∇u , então

temos $\iiint_V \text{div}(\nabla u) dV = \iint_{\partial V} \langle \nabla u, d\vec{\sigma} \rangle$



Teorema de Jordan. Forma canônica

Pergunta 1

1) Teorema: Para cada matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existe uma base de Jordan, em que a matriz A tem uma forma bloco-diagonal.

$$A = \text{diad} \left(J_1^1 \dots J_{k_1}^1, J_1^2 \dots J_{k_2}^2, \dots, J_1^s \dots J_{k_s}^s \right)$$

Cada conjunto de blocos

$(J_1^i \dots J_{k_i}^i)$ relaciona para o subespaço núcleo da matriz A , relaciona para autovalor λ_i .

$$K_i = \text{Ker} (A - \lambda_i I).$$

Cada elemento y_j^i deste bloco relaciona para subespaço cíclico deste espaço núcleo B_j^i .

$$K_i = B_1^i \oplus \dots \oplus B_{k_i}^i$$

$$\text{Todo espaço } \mathbb{R}^n = K_1 \oplus \dots \oplus K_s.$$



2) Neste base a matriz pode escrita como

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{smallmatrix}} & & & \\ & \boxed{\lambda_1} & & 0 \\ & & \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda_2 & \\ & \lambda_2 \end{smallmatrix}} & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda_s & & \\ & \ddots & \\ 0 & & i\lambda_s \end{smallmatrix}} \end{pmatrix}$$

Pergunta 2

$$A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}; p(\lambda) = \det(tI - A) = t^2 + 2t^3a + a^2t = t(t - ia)^2(t + ia)^2.$$

~~Seja~~ Temos $p(A) = 0$. (T. Cayley-Hamilton).

1) Seja $a \neq 0$. Então temos os seguintes espaços nulos

$$K_0 = \text{Ker } A \quad \dim K_0 = 1.$$

$$K_{1,2} = \text{Ker}(A \pm (ia)I); \quad \dim K_{1,2} = 2.$$

Portanto pode ter uma forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \boxed{\begin{smallmatrix} -ia & 0 \\ 1 & -ia \end{smallmatrix}} & & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{smallmatrix} ia & 0 \\ 1 & ia \end{smallmatrix}} & & \\ & & & \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \boxed{\begin{smallmatrix} -ia & 0 \\ 0 & -ia \end{smallmatrix}} & & 0 \\ & & \boxed{\begin{smallmatrix} ia & 0 \\ 0 & ia \end{smallmatrix}} & \\ & & & \end{pmatrix}$$

depende da estrutura do sub-espaço nulo de cada espaço nulo.



2) Seja $t \neq 0$, então $\phi(t) = t^5$.

espaço núcleo $K_0 = \text{Ker } A$: $\dim K_0 = 5$.

A forma
$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & 0 & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ou qual quer
combinação
dos blocos de Jordan
p.e. $A = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \boxed{0} & & & \\ & & \boxed{0} & & \\ & & & \boxed{0} & \\ & & & & \boxed{0} \end{pmatrix}$

Pergunta 3

$B \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\det(tI - B) = (t-1)^n$

Pelo T. de Cayley-Hamilton sabemos, que

$(B-I)^n = 0$.

- $\Rightarrow$ 1) $B = I$, $= B^{-1}$ trivial.
2) $B \neq I \Rightarrow \exists \mathbb{R} \text{ tal } 1 < k \leq n$:
 $(B-I)^k = 0$

Então, $I = B \cdot B^{-1} \Rightarrow (B-I)^k = B^k (I - B^{-1})^k = 0$.

$\Rightarrow (B^{-1} - I)^k = 0$,

Então, matrizes $(B-I)^k$ e $(B^{-1}-I)$ são nilpotentes
com a mesma grau. Isso significa, que os
espaços núcleos são mesmos para B e B^{-1} .

Portanto $\exists$ uma matriz S , $\det S' \neq 0$

(de mudança de base);

$S(B-I)S^{-1} = S(B^{-1}-I)S^{-1} \Leftrightarrow SBS^{-1} = B^{-1}$.



Teorema central do Limite

Pergunta 3

$$X_j: P(X_j = \frac{1}{\sqrt{j}}) = P(X_j = -\frac{1}{\sqrt{j}}) = \frac{1}{2}.$$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

$$E X_j = 0, \quad \sigma_j^2 = \frac{\sigma_j^2}{2} = E X_j^2, \quad \sigma(n) = \sqrt{n} \sigma_j^2$$

$$\text{Pelo Teorema 2: } \frac{S_n}{\sigma(n)} \Rightarrow N \in N(0, 1).$$

Pergunta 4

$$\text{Neste caso } \sigma_j^2 = \frac{2j^2}{4} = \frac{j^2}{2}.$$

Então ~~se~~ ~~converge~~

$$\frac{S_n}{\frac{1}{2} \sqrt{\sum_{j=1}^n j^2}} \Rightarrow N, \in N(0, 1) \text{ se } \alpha > 0.$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Teorema de Stokes.

Pergunta 3

$$\iint_{\partial R} \nabla u \cdot d\vec{r} = \iiint_R \Delta u \, dx \, dy \, dz.$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = u_x \frac{\partial x}{\partial r} + u_y \frac{\partial y}{\partial r} + u_z \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = u_x \frac{\partial x}{\partial \varphi} + u_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} = u_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + u_y \frac{\partial y}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{cases} \quad Y = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$Y = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \theta \\ -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & 0 \\ r \cos \varphi \cos \theta & r \sin \varphi \cos \theta & -r \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\det Y = -r^2 \sin \theta$$

Inverso da sistema (1) da ~~uma~~ as derivadas

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \text{ pelas derivadas } \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Pelo regra de Cramer temos:

$$u_x = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} / \det Y =$$

$$= u_r \frac{y_\varphi z_\theta - y_\theta z_\varphi}{\det Y} + u_\varphi \frac{y_r z_\theta - y_\theta z_r}{\det Y} + u_\theta \frac{y_r z_\varphi - y_\varphi z_r}{\det Y}$$

$$= u_r \cdot \cos \varphi \sin \theta + u_\varphi \left(-\frac{1}{r} \cos \varphi \cos \theta \right) + u_\theta \left(+ \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \right)$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

$$u_y = u_z \frac{z_p x_0 - x_p z_0}{\det J} + u_\varphi \frac{x_z z_0 - z_z x_0}{\det J} + u_\theta \frac{x_\varphi z_0 - x_z z_\varphi}{\det J} =$$

$$= u_z \sin \varphi \sin \theta + u_\varphi \left(\frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \right) + u_\theta \left(-\frac{1}{r} \sin \varphi \cos \theta \right)$$

$$u_z = u_\theta \frac{x_z y_0 - y_z x_0}{\det J} + u_\varphi \frac{y_z x_0 - z_0 x_z}{\det J} + u_r \frac{x_\varphi y_0 - x_0 y_\varphi}{\det J}$$

$$= u_\theta \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) + u_\varphi \cdot 0 + u_r \sin \theta \cos \theta.$$

pergunta 5-i

~~Vetor do normal~~: Coeficientes de Lamé.

~~$$X_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}; X_\varphi = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}; X_\theta = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ -r \sin \theta \end{pmatrix}$$~~

$$X_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}; X_\varphi = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_\theta = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ -r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

$$|X_r| = 1; |X_\varphi| = r \sin \theta; |X_\theta| = r; |X_r| \cdot |X_\varphi| \cdot |X_\theta| = |J|$$

$$\Delta u \Big|_{\text{coord, pol.}} = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{|X_\varphi| |X_\theta|}{|X_r|} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{|X_r| |X_\theta|}{|X_\varphi|} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{|X_r| |X_\varphi|}{|X_\theta|} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right]$$



Teorema de Stokes

Pergunta 3 (cont.)

Então, $\oint_{\partial R} \langle \nabla u, d\vec{n} \rangle$ tem uma
forma:

$$\oint_{\partial R} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\nabla u|_{\varphi_2} d\vec{n} - u|_{\varphi_1} d\vec{n}) +$$
$$+ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\nabla u|_{\varphi_2} d\vec{n} - \nabla u|_{\varphi_1} d\vec{n}) + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\nabla u|_{\theta_2} d\vec{n} - \nabla u|_{\theta_1} d\vec{n})$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(-u \cos \varphi_2 \cos \theta \frac{1}{r} \frac{dx_0}{dx_0} \frac{dx_0}{dx_0} \right) +$$

$$+ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{1}{r} \frac{dx_0}{dx_0} \frac{dx_0}{dx_0} \right)$$

Vetor do normal; pela derivadas de $\vec{x}$

$$d\vec{n} = (dr, r \sin \theta d\varphi, r d\theta).$$

Portanto Dece

Continua na página 3.



Pergunta 5 (cont)

$$\Delta u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{|x_0| |x_0|}{|x_1|} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{|x_1| |x_0|}{|x_0|} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{|x_1| |x_0|}{|x_0|} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right]$$
$$= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right]$$

Pergunta 3 (cont)

$$\iint_{\partial R} \langle \nabla u, d\vec{n} \rangle = \iint_{\varphi_1, \theta_1}^{\varphi_2, \theta_2} \left(\nabla u \Big|_{r_1}^{r_2}, d\vec{n} \right) + \iint_{r_1, \theta_1}^{r_2, \theta_2} \left(\nabla u \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}, d\vec{n} \right) + \iint_{r_1, \varphi_1}^{r_2, \varphi_2} \left(\nabla u \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}, d\vec{n} \right)$$

Também, precisamos comentar que

$$d\vec{n} \Big|_{r_2} = (0, r_2 \sin \theta d\varphi, r_2 d\theta), \text{ porque } dr = 0$$

$$d\vec{n} \Big|_{\varphi_2} = (dr, 0, r d\theta), \text{ porque } d\varphi = 0$$



$$d\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (dr, r \sin \theta |_{\theta_1}^{\theta_2} d\varphi, 0) \rightarrow d\theta = 0.$$

O gradiente ∇u é escrito pelo $(u_r, u_\varphi, u_\theta)$ e funções do (r, φ, θ) acima.

Pergunta 4 As As contribuições do integral de ~~de~~ixo mostram o fluxo entre das faces e bordas.

Então, podemos concluir, que

$$\iint_{\partial R} (\nabla u, d\vec{n}) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] dr d\varphi d\theta$$

Este valor mostra a circulação pela parte R.

Se ~~circulação~~ ~~rotor~~ $\text{div } \nabla u = \Delta u$ é zero
isso significa, que o fluxo pelo R é zero.

Se ~~um~~ ~~dos~~ ~~integrando~~ é zero, isso significa que
na fronteira



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Centro de Ciências Matemática e da Natureza
Instituto de Matemática

CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A – IM
EDITAL 54/2024

o fluxo pela esta fronteira é zero.